

Dernière mise à jour	Détermination des actions dans les mécanismes statiques	Denis DEFAUCHY
16/11/2017		Cours

A.VII. Liaisons équivalentes

Nous nous limiterons ici à la détermination de liaisons équivalentes par la méthode **statique**. Nous avons vu qu'une démarche semblable s'applique avec une méthode cinématique.

A.VII.1 Préliminaires

Rappelons ici succinctement les différents points abordés et illustrés dans le paragraphe « Liaisons équivalentes » « Préliminaires » du cours de cinématique.

Il importe de déterminer un torseur équivalent à plusieurs liaisons en série ou en parallèle dans sa forme canonique. Pour cela :

- soit on reconnaît la liaison recherchée à l'avance et on se place en un point et dans une base associée à cette liaison
- soit on ne la reconnaît pas et on cherche alors à minimiser le moment
 - o Un bon choix de point permet de minimiser le moment (dépendance entre colonnes résultante et moment)
 - o Un bon choix de base permet d'annuler une dépendance entre deux composantes de résultante ET deux composantes (sur les mêmes axes) de moment

On obtient alors un torseur ayant

- des inconnues indépendantes permettant ou non de reconnaître une liaison usuelle selon sa forme
- des inconnues dépendantes, ne pouvant correspondre à une liaison normalisée

Remarque : Une liaison équivalente peut être une liaison normalisée dans une base qui bouge avec le temps et en un point qui peut ne pas être fixe dans l'espace. On peut par exemple trouver une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) où le point O n'est pas fixe au cours du temps dans la base 0 .

A.VII.1.a Méthode de choix du point

Soit P le point d'expression des torseurs des liaisons composant la liaison équivalente recherchée :

- Essayer de reconnaître la liaison recherchée parmi les liaisons usuelles
- Si la liaison recherchée est une liaison usuelle, P sera choisi sur son lieu d'invariance
- P sera choisi, autant que possible, sur un lieu d'invariance commun des différents torseurs des liaisons composant la liaison équivalente afin de minimiser le travail de déplacement des torseurs en P .
- Si des torseurs doivent être déplacés, et si différents points peuvent convenir, P sera le point induisant le moins de termes en moment, c'est-à-dire que les torseurs à déplacer auront généralement le moins possible de composantes de résultante (X, Y, Z) . Cela n'est pas nécessaire dans le cas où parmi les points possibles, le changement de point s'effectue suivant l'axe de la résultante supplémentaire (s'il n'y en a qu'une), car le produit vectoriel de la formule de Varignon n'induit pas de nouveaux termes

Dernière mise à jour 16/11/2017	Détermination des actions dans les mécanismes statiques	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	--	-------------------------

A.VII.1.b Méthode de choix de la base

Pour déterminer la base d'expression du torseur équivalent, il faut :

- Essayer de reconnaître la liaison recherchée parmi les liaisons usuelles
- Si la liaison recherchée est une liaison usuelle, \mathfrak{B} sera une base contenant au minimum les vecteurs proposés dans le tableau des liaisons (ex : $\mathfrak{B}(\vec{x}, -, -) \rightarrow$ choix d'une base quelconque contenant le vecteur \vec{x} , quelle que soit sa position)
- D'une manière générale, choisir une base contenant à la fois les éléments géométriques des liaisons présentes et les éventuels vecteurs qui vont servir à la formule de Varignon

A.VII.2 Analyse

A.VII.2.a Préliminaires

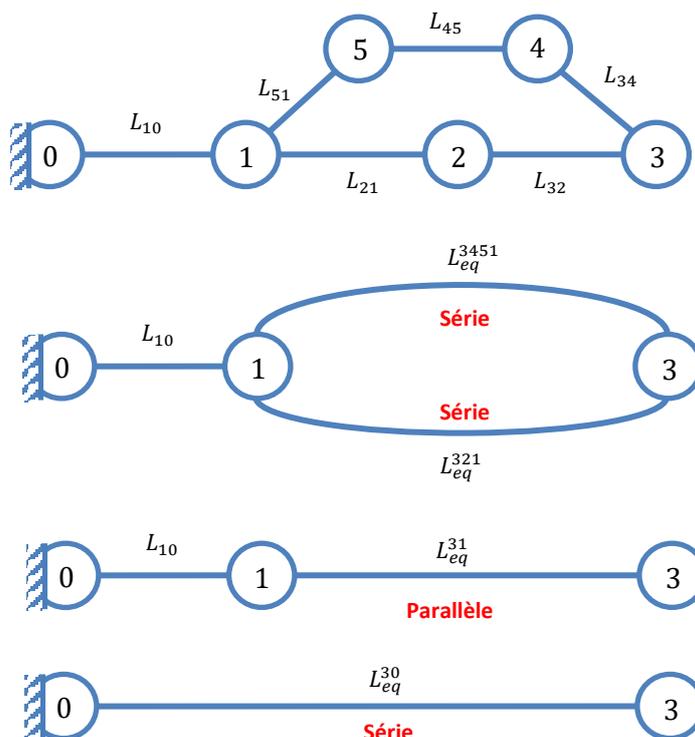
Face à un plan ou une vue 3D d'un mécanisme :

- Analyser les surfaces en contact et proposer les liaisons usuelles correspondantes
- Proposer un modèle cinématique du système : schéma d'architecture
- Etablir son graphe des liaisons
- Identifier si les liaisons étudiées sont en série ou en parallèle

A.VII.2.b Décomposition du problème

Lorsque l'étude porte sur des liaisons à la fois en série et en parallèle, et où s'il y a plus de 2 liaisons à étudier, il est possible, voire conseillé, de décomposer le problème en somme de problèmes simples contenant quelques liaisons en menant toute la démarche à chaque étape.

Exemple :



Dernière mise à jour 16/11/2017	Détermination des actions dans les mécanismes statiques	Denis DEFAUCHY Cours
------------------------------------	--	-------------------------

A.VII.2.c Liaisons en série



Lorsque deux pièces sont reliées par plusieurs liaisons successives, la liaison équivalente entre ces deux pièces possède un degré de mobilité supérieur ou égale au maximum des degrés de mobilité de chaque liaison intermédiaire.

Méthode :

- Choisir point P et base \mathfrak{B}
- Exprimer les n torseurs statiques en P dans \mathfrak{B} des liaisons $\{\mathcal{T}_{n/n-1}\}, \{\mathcal{T}_{n-1/n-2}\} \dots \{\mathcal{T}_{2/1}\}$
- Poser le torseur générique de la liaison équivalente $\{\mathcal{T}_{n/1}\}$ comportant les 6 inconnues en P dans \mathfrak{B}
- Par application du PFS à chaque solide, on a :

Solide	PFS	Déduction
2	$\{\mathcal{T}_{1/2}\} + \{\mathcal{T}_{3/2}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \{\mathcal{T}_{3/2}\}$
i	$\{\mathcal{T}_{i-1/i}\} + \{\mathcal{T}_{i+1/i}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{i+1/i}\} = \{\mathcal{T}_{i/i-1}\}$
n	$\{\mathcal{T}_{n-1/n}\} + \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow n}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{n/n-1}\} = \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow n}\}$
n via L_{eq}	$\{\mathcal{T}_{1/n}\} + \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow n}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow n}\}$

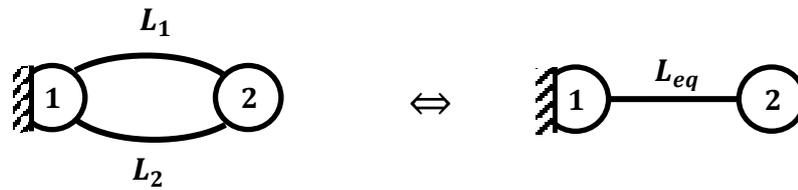
Finalement, on trouve :

$$\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \{\mathcal{T}_{n/n-1}\} = \{\mathcal{T}_{n-1/n-2}\} = \dots = \{\mathcal{T}_{2/1}\}$$

Attention au choix du point P et de la base \mathfrak{B} – Attention à l'ordre des indices

- Exprimer $\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{n/1} & L_{n/1} \\ Y_{n/1} & M_{n/1} \\ Z_{n/1} & N_{n/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues statiques indépendantes non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
 - o Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
 - o Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

A.VII.2.d Liaisons en parallèle



Des liaisons en parallèle permettent généralement de répartir les efforts que chacune va subir dans un contexte de dimensionnement de mécanismes. L'ensemble des plusieurs liaisons entre deux pièces réalise une nouvelle liaison à mobilité inférieure ou égale à la mobilité de chacune des liaisons.

Méthode :

- Choisir point P et base \mathfrak{B}
- Exprimer les n torseurs statiques en P dans \mathfrak{B} de chaque liaison en prenant soin de différencier leur notation, en utilisant un numéro pour chacune: $\{\mathcal{T}_{2/1}^1\}, \{\mathcal{T}_{2/1}^2\} \dots \{\mathcal{T}_{2/1}^n\}$.
- Par application du PFS, on a :

Solide	Liaison	PFS	Déduction
2	n	$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow n}\} + \sum_{i=1}^n \{\mathcal{T}_{1/2}^i\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow n}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{T}_{2/1}^i\}$
2	L_{eq}	$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow n}\} + \{\mathcal{T}_{1/2}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow n}\} = \{\mathcal{T}_{2/1}\}$

$$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{T}_{2/1}^i\} = \{\mathcal{T}_{2/1}^1\} + \{\mathcal{T}_{2/1}^2\} + \dots + \{\mathcal{T}_{2/1}^n\}$$

Attention au choix du point P et de la base \mathfrak{B} – Attention à l'ordre des indices

- Exprimer $\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \begin{pmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues statiques indépendantes non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
 - o Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
 - o Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles